Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Anna Bahyrycz

Ekstrema funkcji dwóch zmiennych

Definicja 1

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe, gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) > f(x_0, y_0).$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne właściwe, gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Uwaga 1

1. *Jeżeli w powyższej definicji zastąpimy ostre nierówności przez słabe (tzn. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ lub $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$), to mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne lub maksimum lokalne.*
2. *Maksima i minima lokalne funkcji (właściwe lub niewłaściwe) nazywamy ekstremami lokalnymi.*

Twierdzenie 1 (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne i istnieją pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Uwaga 2

1. *Punkty, w których obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu się zerują nazywamy stacjonarnymi (krytycznymi).*
2. *W powyższym twierdzeniu implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.*
3. *Funkcja może mieć ekstremum lokalne tylko w punkcie stacjonarnym lub*
   w punkcie, w którym przynajmniej jedna pochodna nie istnieje.
   Punkty te nazywamy krytycznymi.

Przykład 1 (implikacja odwrotna w Twierdzeniu 4 nie jest prawdziwa)

Wyznaczyć punkty stacjonarne funkcji $f(x, y) = x^3$.
Zbadać, czy funkcja f ma ekstrema lokalne.
$D_f = \mathbb{R}^2$. *Wyznaczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad - \text{ funkcje ciągłe.}$$

Wyznaczamy punkty stacjonarne funkcji f

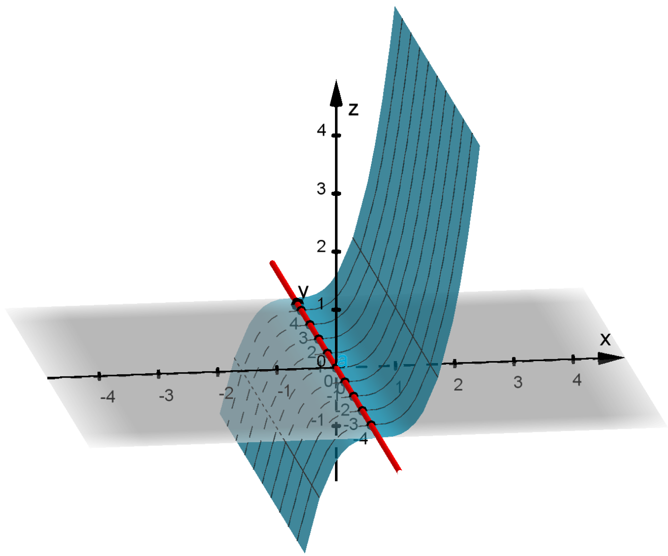
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Punkty stacjonarne funkcji f mają postać $(0, y)$, gdzie $y \in \mathbb{R}$.
Pokażemy, korzystając z definicji, że funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.
Niech y_0 będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas

$$f(0, y_0) = 0, \quad f\Big(\frac{1}{n}, y_0\Big) = \frac{1}{n^3} > 0, \quad f\Big(-\frac{1}{n}, y_0\Big) = -\frac{1}{n^3} < 0,$$

co oznacza, że funkcja f nie ma ekstremum w punkcie $(0, y_0)$.
Zerowanie się w punkcie obu pochodnych cząstkowych funkcji nie gwarantuje istnienia ekstremum lokalnego funkcji w tym punkcie.

Punkty stacjonarne funkcji $f(x,y) = x^3$



Twierdzenie 2 (warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na pewnym otoczeniu punktu (x_0,y_0) oraz niech

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$,
- *wyznacznik, zwany hesjanem*

$$H(x_0,y_0) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix} > 0$$

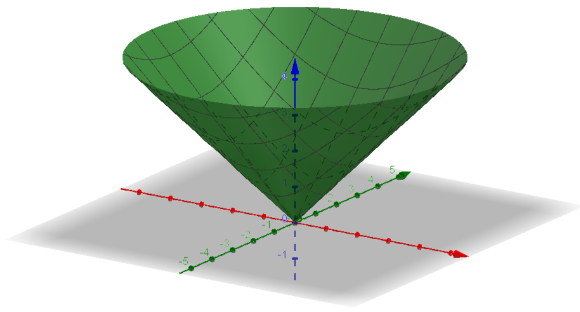
to funkcja f ma w punkcie (x_0,y_0) ekstremum lokalne właściwe i jest to:
minimum lokalne właściwe, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ *albo*
maksimum lokalne właściwe, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$.

Uwaga 3

1. *Jeżeli hesjan $H(x_0,y_0) < 0$, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie (x_0,y_0).*
2. *Jeżeli hesjan $H(x_0,y_0) = 0$, to twierdzenie nie rozstrzyga.*

Przykład 2

Zbadać ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.



Pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(0,0)$ nie istnieją, zatem w tym punkcie funkcja f może mieć ekstremum.
Ponieważ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *dla* $(x,y) \neq (0,0)$,
więc funkcja f nie ma punktów stacjonarnych.
Funkcja f ma w punkcie $(0,0)$ minimum lokalne właściwe, bo
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ *i* $f(x,y) = 0$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $x = y = 0$.

Przykład 3

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 12xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 12y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy + 12x \quad \text{– funkcje ciągłe.}$$

Wyznaczamy punkty stacjonarne funkcji f

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2+y^2+4y) = 0 \\ 6x(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 0 \wedge y(y+4) = 0) \vee (y = -2 \wedge x^2 = 4).$$

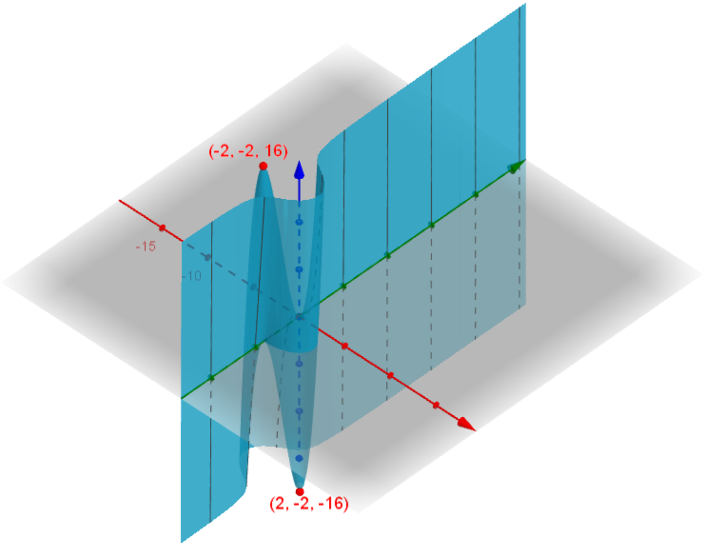
Punkty stacjonarne
$f:\quad P_1 = (0,0),\ P_2 = (0,-4),\ P_3 = (2,-2),\ P_4 = (-2,-2)$.

$$H(x,y) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 6x & 6y+12 \\ 6y+12 & 6x \end{bmatrix}$$

$$= 36x^2 - 36(y+2)^2 = 36\big(x^2 - (y+2)^2\big)$$

$H(P_1) = 36 \cdot (-4) < 0,\ H(P_2) = 36 \cdot (-4) < 0$ - *brak ekstremum w P_1 i w P_2*
$H(P_3) = H(P_4) = 36 \cdot 4 > 0$ - *funkcja f ma ekstrema w P_3 i P_4 i są to minimum lokalne w P_3, bo* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_3) = 12 > 0$, - $f_{min}(P_3) = -16$
i maksimum lokalne w P_4 bo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_4) = -12 < 0$ - $f_{max}(P_4) = 16$.

Ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 12xy$



Algorytm szukania ekstremów warunkowych

Ekstremów lokalnych funkcji f dwóch zmiennych z warunkiem $g(x,y) = 0$ szukamy następująco:

1. Krzywą $\Gamma : g(x,y) = 0$ dzielimy na łuki, które są wykresami funkcji postaci $y = h(x)$, gdzie $x \in I$ lub postaci $x = p(y)$, gdzie $y \in J$.
2. Szukamy ekstremów funkcji jednej zmiennej $f(x, h(x))$ na przedziale I lub funkcji $f(p(y), y)$ na przedziale J.
3. Porównujemy wartości otrzymanych ekstremów na krzywej Γ i ustalamy ekstrema warunkowe.

Definicja 2 (ekstrema warunkowe)

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe z warunkiem $g(x,y) = 0$, gdy $g(x_0, y_0) = 0$ oraz istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $(x,y) \in S(x_0, y_0)$ spełniającego warunek $g(x,y) = 0$ zachodzi nierówność $f(x,y) > f(x_0, y_0)$.

Analogicznie, funkcja f ma maksimum warunkowe, gdy zachodzi odwrotna nierówność, tzn. $f(x,y) < f(x_0, y_0)$.

Definicja 3

Niech A będzie niepustym podzbiorem dziedziny funkcji f.

Mówimy, że liczba m jest najmniejszą wartością funkcji f na zbiorze A, gdy istnieje punkt $(x_0, y_0) \in A$ taki, że $f(x_0, y_0) = m$ oraz dla każdego $(x,y) \in A$ zachodzi nierówność $f(x,y) \geq m$. Piszemy wtedy $f_{min} = m$.

Mówimy, że liczba M jest największą wartością funkcji f na zbiorze A, gdy istnieje punkt $(x_0, y_0) \in A$ taki, że $f(x_0, y_0) = M$ oraz dla każdego $(x,y) \in A$ zachodzi nierówność $f(x,y) \leq M$. Piszemy wtedy $f_{max} = M$.

Twierdzenie 3 (Weiestrassa)

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem domkniętym i ograniczonym. Wówczas jeżeli funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w D to:

1. *jest ograniczona,*
2. *przyjmuje co najmniej raz w zbiorze D wartość najmniejszą i wartość największą.*

Algorytm szukania ekstremów globalnych na obszarze domkniętym

Wartość najmniejszą i największą funkcji f dwóch zmiennych na ograniczonym i domkniętym obszarze D znajdujemy następująco:

1. Na obszarze otwartym (wnętrzu obszaru D) szukamy punktów, w których funkcja f może mieć ekstremum lokalne.
2. Na brzegu obszaru D szukamy punktów, w których funkcja f może mieć ekstremum warunkowe.
3. Porównujemy wartości funkcji f w otrzymanych punktach i na tej podstawie ustalamy najmniejszą i największą wartość funkcji f na obszarze D.

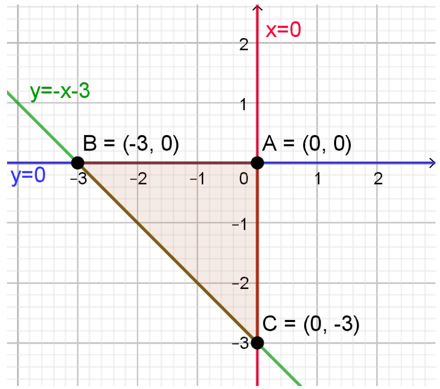
Przykład 4

Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

w trójkącie domkniętym T *ograniczonym przez proste o równaniach*

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y + 3 = 0.$$



Przykład 4 c.d.

1. Wyznaczamy punkty, w których funkcja f może mieć ekstrema lokalne we wnętrzu trójkąta T.

   $$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

   Znajdujemy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f :

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x + 1 \quad - \text{ funkcje ciągłe.}$$

   Wyznaczamy punkty stacjonarne funkcji f

   $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2(2x+1) - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

   Punkt stacjonarny funkcji f : $P_0 = (-1,-1)$ - należy do wnętrza trójkąta T.

Przykład 4 c.d. $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$

2. Wyznaczamy punkty, w których funkcja f może mieć ekstrema lokalne na każdym z boków trójkąta.
   Boki trójkąta to:
   1. $\Gamma_1 : \ x = 0,$ gdzie $-3 < y < 0;$
   2. $\Gamma_2 : \ y = 0,$ gdzie $-3 < x < 0;$
   3. $\Gamma_3 : \ y = -x - 3,$ gdzie $-3 < x < 0.$

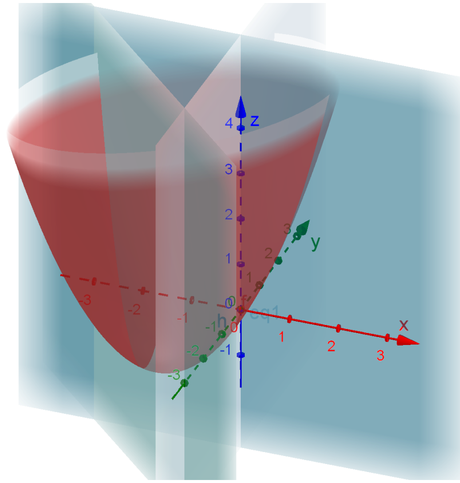
   Mamy zatem:
   $f_1(y) = f(0,y) = y^2 + y,$ gdzie $-3 < y < 0;$
   $f_2(x) = f(x,0) = x^2 + x,$ gdzie $-3 < x < 0;$
   $f_3(x) = f(x,-x-3) = x^2 + \big(-(x+3)\big)^2 + x(x+3) + x - x - 3 =$
   $= x^2 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 3x - 3 = 3x^2 + 9x + 6,$ gdzie $-3 < y < 0.$
   Wyznaczamy punkty, w których funkcje f_1, f_2, f_3 mogą mieć ekstrema lokalne:
   $f_1'(y) = 2y + 1;\ f_1'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \in (-3,0);\ \ P_1 = (0, -\frac{1}{2}) \in \Gamma_1;$
   $f_2'(x) = 2x + 1;\ f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in (-3,0);\ \ P_2 = (-\frac{1}{2}, 0) \in \Gamma_2;$
   $f_3'(x) = 6x + 9;\ f_3'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \in (-3,0);\ \ P_3 = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) \in \Gamma_3.$

Przykład 4 c.d. $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$

3. Wyznaczamy wartości funkcji w punktach wyznaczonych z warunków 1. i 2. oraz w wierzchołkach trójkąta T. Porównujemy otrzymane wartości funkcji f i na tej podstawie ustalamy najmniejszą i największą wartość funkcji f na trójkącie T.
   Wyznaczamy wartości funkcji w punktach P_0, P_1, P_2, P_3
   $f(-1,-1) = -1;$
   $f(0,-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4};$
   $f(-\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{4};$
   $f(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4};$
   oraz w wierzchołkach trójkąta T
   $f(0,0) = 0;$
   $f(-3,0) = 6;$
   $f(0,-3) = 6.$

Najmniejsza wartość funkcji f na trójkącie domkniętym T to -1, największa wartość funkcji f na domkniętym trójkącie T to 6.

Przykład 4 c.d.



$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

T trójkąt domknięty ograniczony przez proste:
$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y + 3 = 0.$

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Definicja 4

Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ ma w punkcie $x_0 \in D$ minimum lokalne właściwe, gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $x \in S(x_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x) > f(x_0).$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0, maksimum lokalne właściwe, gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $x \in S(x_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x) < f(x_0).$$

Uwaga 4

1. *Jeżeli w powyższej definicji zastąpimy ostre nierówności przez słabe (tzn. $f(x) \geq f(x_0)$ lub $f(x) \leq f(x_0)$), to mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne lub maksimum lokalne.*
2. *Maksima i minima lokalne funkcji (właściwe lub niewłaściwe) nazywamy ekstremami lokalnymi.*

Twierdzenie 4 (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ ma w punkcie $x_0 \in D$ ekstremum lokalne i wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu istnieją w x_0, to są one równe zero.

Uwaga 5

1. *Punkty, w których wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu się zerują nazywamy stacjonarnymi.*
2. *W powyższym twierdzeniu implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.*
3. *Funkcja może mieć ekstremum lokalne tylko w punkcie stacjonarnym lub*
   w punkcie, w którym przynajmniej jedna pochodna cząstkowa pierwszego rzędu nie istnieje.

Macierz Hessego

Niech funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ma wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Macierz

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą Hessego funkcji f. Definiujemy funkcje

$$\Delta_i(x) := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x) \end{vmatrix} \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n.$$

Uwaga 6

Zauważmy, że $\Delta_1(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x)$ *i* $\Delta_n(x) = \det Hf(x)$.

Twierdzenie 5 (warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ *i funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *spełnia warunki:*

- f *ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na pewnym otoczeniu punktu* $x_0 \in D$,
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ *dla* $i = 1, \ldots, n$.

Wówczas:

1. *Jeżeli* $\Delta_i(x_0) > 0$ *dla* $i = 1, \ldots, n$, *to w punkcie* x_0 *funkcja* f *ma minimum lokalne właściwe.*
2. *Jeżeli* $(-1)^i \Delta_i(x_0) > 0$ *dla* $i = 1, \ldots, n$, *to w punkcie* x_0 *funkcja* f *ma maksimum lokalne właściwe.*